

6. cvičení - teorie

K = konverguje, D = diverguje, AK = absolutně konverguje

Věta 7.1 (Nutná podmínka konvergence). Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Věta 7.2 (srovnávací kritérium = SK). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady splňující $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak platí:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ K} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ K}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ D} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ D}$$

Věta 7.3 (limitní srovnávací kritérium = LSK). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy splňující

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty).$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ K} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ K}.$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \text{ K} \iff |q| < 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \log^{\beta} n \text{ K} \iff ((\alpha < -1, \beta \in \mathbb{R}) \vee (\alpha = -1, \beta < -1))$

návod na výběr $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pro (L)SK (odkaz)

Věta 7.4 (Cauchyovo odmocninové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$$(b) \limsup \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ K}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ K}$$

$$(d) \limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ D}$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ D}$$

Věta 7.5 (d'Alembertovo podílové kritérium). (a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K.

$$(b) \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ K}$$

$$(c) \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ K}$$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ D

Věta 7.6. Necht' $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty \iff \alpha > 1.$$

Věta 7.7 (Lebnizovo kritérium). Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Necht' platí

- $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ K.

Jak ověřit monotonii:

- dokázat, že $b_{n+1} - b_n \leq 0$ nebo $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a nezápornou posloupnost, pak $\{b_n\}$ nerostoucí
- pokud $b_n = f(n)$, ukázat, že f je monotónní na $[0, \infty)$ - vyšetříme pomocí derivace

Věta 7.8. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Pak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

- Řady typu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ lze řešit buď Leibnizem, pomocí Věty 7.8 nebo dle Věty 7.1.

Z prvního roku/mohlo by se hodit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Podobné limity - x je v základu mocniny i v exponentu - se řeší pomocí triku

$$a^b = e^{b \log a},$$

Heine a VoLSF (viz níže)...

Více viz Matematika 1 - např.: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~dvorakova/pdf/M1%20-%202023-24/resene_priklady_7.pdf

Věta (Heine - polovina). Necht' $c, A \in \mathbb{R}^*$ a pro reálnou funkci f platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z definičního oboru funkce f taková, že $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Věta (VoLSF). Buď $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, a jsou f a g funkce. Necht' platí, že $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ a $\lim_{x \rightarrow D} f(x) = A$. Necht' platí alespoň jedna z podmínek:

(P) $\exists \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq D$,

(S) f je spojitá v D .

Pak platí $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$.

Věta (O posloupnosti s kladnými členy). Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = A^m \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}$.

Vzorce aspol.

- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (vhodné pro $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ apod.)
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

obecně:

- $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1}) = (A - B) \left(\sum_{k=1}^n A^{n-k} B^{k-1} \right)$
- $(A + B)^n = A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + \dots + B^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$
- $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$